計算手順書

ある日誰かの家の中で

平成 26 年 11 月 5 日

目 次

1　正負の数と負号 (負の符号) の操作について

絶対値　絶対値とは数から符号を取り払った値を示す．結果的には**正の数**として表現される．記号は数 a を $||$ で囲った表現で表される．

$$|3| = |-3| = 3$$

そのため，数 a において，$a > 0$(a は正の数) が確定している場合 $|a|$ は a であり，$a < 0$(a は負の数) が確定している場合 $|a|$ は $-a$ であるとも言い換えられる．

負の数から-1 を取り出す　負の数は次の例の様に，-1 とその絶対値の掛け算に分解可能である．

$$-6 = ((-1) \times 6)$$

応用:) 実際には負の数かどうかは関係がない．ある数 a について，-1 を取り出したい場合，a に負の符号をつけたものとの掛け算に分解すればよい．

$$a = ((-1) \times (-a))$$

具体例

$$\begin{aligned} -6 &= ((-1) \times 6) \\ 7 &= ((-1) \times (-7)) \end{aligned}$$

2　分数について

分数と割り算　分数と割り算は計算の意味としては同じである．具体的には以下の関係が成り立つ．

$$\frac{a}{b} = ((a) \div (b)) \quad (b \neq 0)$$

負の符号　分子か分母の片方だけについている負の符号は分数の前に付け直すことができる．

$$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

また，分子と分母の両方に負の符号が付いている場合は打ち消されて正の数となる．

$$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

分数の等価変形と分数内の小数排除　分数の分母と分子に 0 でない同じ数をかけることで，**分数そのものが表す数を変化させることなく**その見た目を変えることができる．

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \quad (c \neq 0)$$

具体例としては，分数内に存在する小数を自然数に直す変形が挙げられる．

$$\frac{0.5}{0.07} = \frac{0.5 \times 100}{0.07 \times 100} = \frac{50}{7}$$

既約分数　既約分数とは端的に言うならば**「これ以上簡単にできない分数」**のことを示し，以下の条件を満たす分数のことである．

- 分子・分母共に 0 ではない
- 分子・分母は互いに素である (これ以上約分ができない)
- 分母が 1 または -1 ではない (整数に直すことができない)

中学生の数学においては原則として分数は既約分数で表現する必要がある．

a と b が互いに素である　a と b が互いに素であるとは，a と b の共通の最大公約数が 1 であることをさす．

分数の約分　以上のことから，分数 $\dfrac{a}{b}$ が約分可能であるとは，a と b の最大公約数が 1 より大きいことである．すなわち，**分数が約分可能であるか確かめるためには分子分母の最大公約数を調べればよい**．これを確かめるためには**ユークリッドの互除法**を用いるのが最も手っ取り早い．ユークリッドの互除法を用いて最大公約数を求めることができれば，その最大公約数で分子分母を割ることでこれ以上約分することができない分数にすることができる．

ユークリッドの互除法　ユークリッドの互除法は自然数 a，b の最大公約数を求める手法である．従って，分数の約分に使うためには次の前準備が必要である．

- 以下の例の様に分子分母に小数がある場合は自然数になるよう変形する

$$\frac{0.6}{7} = \frac{6}{70}, \quad \frac{0.15}{0.0125} = \frac{1500}{125}$$

- 負の符号は分数の外に付けるようにする

前準備ができたらユークリッドの互除法を行う，手順は次の通り．

1. 大きい方の数字 $\div$ 小さい方の数字の余りを求める．
2. 余りが 0 でなければ，大きい方の数字を求めた余りで置き換えて手順 1 に戻る．
3. 余りが 0 であれば，その時の「割った数」($x \div y = z$ の y の部分) が最大公約数となる．

この互除法によって求められた最大公約数を用いて分子分母を約分する．具体例を以下に示す．

例題：$\dfrac{-42}{2.58}$ を最も簡単な分数表現とせよ
まず前準備として分子分母を自然数表現となるようにする．

$$\frac{-42}{2.58} = -\frac{42}{2.58} = -\frac{4200}{258}$$

ユークリッドの互除法で 4200 と 258 の最大公約数を求める．

$$\begin{aligned} 4200 \div 258 &= 16 \cdots 72 \\ 258 \div 72 &= 3 \cdots 42 \\ 72 \div 42 &= 1 \cdots 30 \\ 42 \div 30 &= 1 \cdots 12 \\ 30 \div 12 &= 2 \cdots 6 \\ 12 \div 6 &= 2 \cdots 0 \end{aligned}$$

よって最大公約数は 6 であるため，6 で約分する．

$$-\frac{\overset{700}{\cancel{4200}}}{\underset{43}{\cancel{258}}} = -\frac{700}{43}$$

約分応用　次の分数の約分を考える．

$$\frac{10x+12y}{4}$$

この分数は約分可能である．**分母が単項式であれば**次のような分数の分解を行うことで従来の約分と同等の考え方ができる．

$$\frac{10x+12y}{4} = \frac{10x}{4} + \frac{12y}{4} = \frac{10}{4}x + \frac{12}{4}y = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}x + \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}y = \frac{5}{2}x + 3y$$

この変形の正しさは次の分配法則によって担保される．

$$\frac{10x+12y}{4} = ((10x+12y) \div 4) = (10x \div 4 + 12y \div 4) = \left(\frac{10x}{4} + \frac{12y}{4}\right)$$

分母が多項式でない場合はかなり厄介であり，最も面倒なパターンである．次の例題を考える．

$$\frac{15x+24y}{6a-3b}$$

この分数は約分可能である．このような場合は**分母の式から共通因数をくくり出すことで見た目上単項式とできないか**考える．$6a$ と $-3b$ の共通因数は 3 であるので，これをくくり出す．(この共通因数は 6 と 3 に対してユークリッドの互除法を用いることで求めることができる．) また,「見た目上単項式」とは，**括弧の最も外側の演算に掛け算 (割り算) 以上の優先順位の計算しか存在しない**式を指す．(例：$-(2x+y)(x+2y) = (-1) \times (2x+y)(x+2y)$ は見た目上単項式に分類される)

$$\frac{15x+24y}{6a-3b} = \frac{15x+24y}{3(2a-b)}$$

$3(2a-b)$ が見た目上単項式とみなせるため，先ほどと同様に分数を分解する．

$$\frac{15x+24y}{3(2a-b)} = \frac{15x}{3(2a-b)} + \frac{24y}{3(2a-b)} = \frac{15}{3(2a-b)}x + \frac{24}{3(2a-b)}y$$

分数の分子の数値と分母のくくり出された共通因数を比べ，約分を行う．すなわち，$\dfrac{15}{3(2a-b)}x$ の部分は 15 と 3，$\dfrac{24}{3(2a-b)}y$ の部分は 24 と 3 に注目して約分を行う．

$$\frac{15}{3(2a-b)}x + \frac{24}{3(2a-b)}y = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{3}}(2a-b)}x + \frac{\overset{8}{\cancel{24}}}{\underset{1}{\cancel{3}}(2a-b)}y = \frac{5}{2a-b}x + \frac{8}{2a-b}y$$

3　数値の計算

ここからは数値の計算についての簡易的な説明を行う．代数的文字 (x とか y とか a とか α とか) を含む計算規則については後の節で説明する．

3.1　計算の優先順位

概要としては次のような順位となっている．

累乗と根号 $\gtrdot$ 省略された掛け算と分数と負の符号 $\gtrdot$ 掛け算と割り算 $\gtrdot$ 足し算と引き算

ここで $\gtrdot$ は計算の優先度を比較する不等号で，例えば $\times \gtrdot +$ ならば $\times$ は $+$ よりも先に計算しなければならないことを示す．この優先順位を変えたいならば，その範囲を括弧でくくる必要がある．また，括弧は先に計算しなければならない部分を強調する意味合いで用いることもある．そうすることで計算の順序を間違えることを防ぐのである．以下にいくつかの例題を示す．

例題:) 次の計算をせよ

$$9 \div 3(1+2)$$

括弧でくくられているので $(1+2)$ を先に計算する．ただし，その手前の 3 との掛け算は省略された掛け算であるので，$9 \div \bigcirc$ の割り算よりも先に計算しなければならない点に注意する．

$$9 \div 3(1+2) = 9 \div (3 \times (1+2)) = 9 \div (3 \times 3) = 9 \div 9 = 1$$

例題:) 次の計算をせよ

$$-3^2 \times (-2)^3$$

累乗の優先度が最も高いのでそれを先に計算する．ただし，$(-2)^3$ は -2 が括弧でくくられているので -2 全体を 3 乗しなければならないことに注意する．

$$-3^2 \times (-2)^3 = -(3 \times 3) \times ((-2) \times (-2) \times (-2)) = -9 \times (-8) = 72$$

3.2　足し算の法則

足し算の原則　基本的には左から順番 (左結合的) に計算する．ただし，以下に述べる交換法則と結合法則から，実際はどこから計算しても答えは同じになる．

交換法則 (対称性)　足し算は左右をひっくり返しても答えが変わらない．

$$5+6=6+5=11$$

結合法則 (推移性)　三つの項を持つ足し算において，左結合的に計算しても右結合的に計算しても答えが変わらない．

$$(1+2)+3=1+(2+3)=1+2+3=6$$

分数の足し算　分母が等しい分数は足し算が可能である．結果は，分母が元の分数と同じであり，分子を普通に足し算したものとなる．

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

分母が等しくない場合は足し算ができないため，通分をする必要がある．

通分　二つの分数の分母を同じ数に合わせる操作を通分という．この操作には 2 節で述べた $\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}\ (c\neq 0)$ を利用する．例えば，

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$$

の場合は分母を 12 に合わせるために，

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{1\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{13}{12}$$

と変形し，計算する．この「12 に合わせる」の「12」は**それぞれの分数の分母である 3 と 4 の公倍数**である．数が大きくなると計算が面倒であるため大抵は最小公倍数を用いるが，**必ずしも最小公倍数である必要はない**．

補足:公倍数の求め方　二つの自然数 a と b がある時，$a\times b$ は**必ず**公倍数になる (最小とは限らない)．

例題:) $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$ を計算せよ．

それぞれの分母が 6 と 4 であるため，$6\times 4=24$ は公倍数であり，これに分母を合わせるよう通分する．

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1\times 4}{6\times 4}+\frac{1\times 6}{4\times 6}=\frac{4}{24}+\frac{6}{24}=\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{12}{\cancel{24}}}=\frac{5}{12}$$

最後に約分が可能であればすることを忘れないように．

3.3　引き算の法則

引き算の位置付け　引き算は足し算の逆演算として位置付けられている．即ち，

$$5+6=\bigcirc$$

の○を計算することが足し算であるならば，

$$5+\bigcirc=11$$

の○を計算することを引き算と言い，

$$11 - 5 = \bigcirc$$

と表現する．足し算には交換法則が成立するため，

$$\bigcirc + 6 = 11$$

という形式においても，

$$\bigcirc + 6 = 11 \Leftrightarrow 6 + \bigcirc = 11$$

であることから，

$$11 - 6 = \bigcirc$$

と表現できる．

引き算の原則　基本的には左から順番に計算する．引き算は結合法則が成り立たないので，**計算の順序を入れ替えるためには負の数の足し算に直してから**行う必要がある．
具体例

$$3 + 5 - 3 = 3 + 5 + (-3) = 3 + (-3) + 5 = 5$$
$$7 - 5 + 3 = 7 + (-5) + 3 = 7 + 3 + (-5) = 10 + (-5) = 5$$

反対称性　引き算は左右をひっくり返すと絶対値は同じで符号が反対の答えになる．例えば，

$$\begin{aligned} 6 - 5 &= 1 \\ 5 - 6 &= -1 \end{aligned}$$

なので，

$$6 - 5 = -(5 - 6)$$

が成立する．

3.4　掛け算の法則

掛け算の位置付け　掛け算は，足し算の繰り返しとして位置付けられる．例えば，2×3 とは次のような意味となる．

$$2 \times 3 = (2 + 2 + 2)$$

掛け算は基本的には左から順番に計算する．ただし，以下に述べる交換法則と結合法則から，実際はどこから計算しても答えは同じになる．

交換法則 (対称性)　掛け算は左右をひっくり返しても答えが変わらない．

$$2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

これは即ち，

$$(2 + 2 + 2) = (3 + 3) = 6$$

であることを表す．これは数字上ではあまり直観的ではないが，図 1 の図を用いれば視覚的に捉えられる．即ち，縦 2 マスを 3 回足すことでこの図を作るのか，横 3 マスを 2 回足すことでこの図を作るのか，どちらであるとしても同じ図を完成させることができるということである．

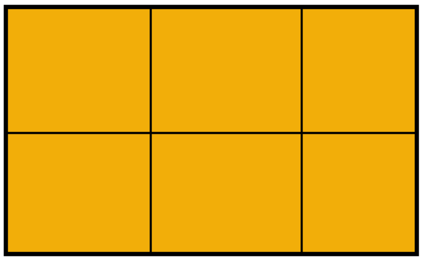


図 1: $2 \times 3 = 3 \times 2$ のイメージ

結合法則 (推移性)　三つの項を持つ掛け算において，左結合的に計算しても右結合的に計算しても答えが変わらない．

$$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

こちらは図2を用いれば視覚的に捉えることができる．2×3 の底面を4回積み上げても，3×4 の底面を2回積み上げても同じ立体を作ることができる．

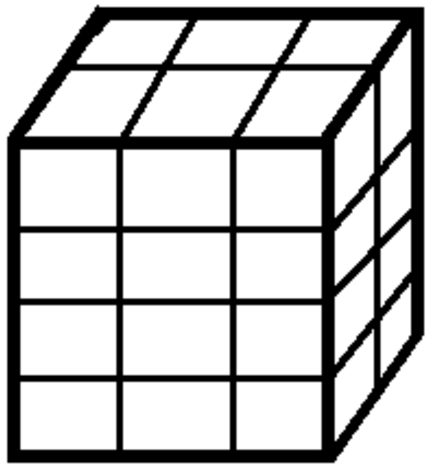


図 2: $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$ のイメージ

分数の掛け算　二つの分数の掛け算は，それぞれの分母同士，分子同士を掛けて一つの分数にしたものになる．

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{5}{6}$$

もちろん，計算の途中で約分をしてもよい (「見た目上単項式」の話を思い出そう)．

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \times 5}{3 \times \underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{5}{6}$$

掛け算記号の省略　掛け算の記号 $\times$ は，**省略することで意味が変化せず，計算の優先順位が変わることで答えが変わらない**ならば，それを省略することができる．前者の例としては，$2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ とすることは出来るが，$2 \times 3 = 23$ としたり (「に かける さん」が「にじゅうさん」になってしまう)，$2 \times \frac{3}{5} = 2\frac{3}{5}$(整数と分数の掛け算が帯分数になっている) とすることは出来ない．後者の例としては，

$$3 \times (1 + 2)$$

は $\times$ を省略しても計算の優先順位は変わらないため，

$$3(1 + 2)$$

と書くことができる．しかし，次の場合は省略することは出来ない．

$$9 \div 3 \times (1 + 2) \neq 9 \div 3(1 + 2)$$

ここで，$9 \div 3 \times (1+2)$ の $\div$ と $\times$ はともに左から計算する同じ優先順位の演算である．従って，この計算では $9 \div 3$ を計算してから，$(9 \div 3$ の答え$) \times (1 + 2)$ を計算する必要がある．しかし，$\times$ を省略し，$9 \div 3(1 + 2)$ としてしまうと，$9 \div$ 〇 よりも $3(1 + 2)$ の計算の優先順位が上がってしまう．割り算では結合法則が成立しないため，$\times$ の省略を許すと答えが変化してしまう．よって省略不可である．実際に計算してみると，

$$9 \div 3 \times (1 + 2) = 3 \times (1 + 2) = 3 \times 3 = 9$$

$$9 \div 3(1 + 2) = 9 \div (3 \times 3) = 9 \div 9 = 1$$

であり，両者の答えは異なっている．どうしても $9 \div 3 \times (1 + 2)$ の $\times$ を省略したい場合は次のように変形すると正しい．

$$(9 \div 3)(1 + 2)$$

3.5 割り算の法則

割り算の位置付け 割り算は掛け算の逆演算として位置付けられている．即ち，

$$3 \times 4 = \bigcirc$$

の○を計算することが掛け算であるならば，

$$3 \times \bigcirc = 12$$

の○を計算することを割り算と言い，

$$12 \div 3 = \bigcirc$$

と表現する．掛け算には交換法則が成立するため，

$$\bigcirc \times 4 = 12$$

という形式においても，

$$\bigcirc \times 4 = 12 \Leftrightarrow 4 \times \bigcirc = 12$$

であることから，

$$12 \div 4 = \bigcirc$$

と表現できる．割り算は基本的に左から順番に計算する．割り算では交換法則や結合法則が成立しないため，順序を入れ替えるためには掛け算に直してから入れ替える必要がある．

割り算を掛け算に変換 割り算は掛け算で表現し直すことが可能である．**割る数の分母と分子をひっくり返し掛け算に直す**ことで割り算を掛け算にすることができる．

$$8 \div 2 = 8 \times \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

3.6 累乗の法則

累乗の位置付け 累乗は掛け算の繰り返しとして位置付けられる．即ち，

$$2^3 = (2 \times 2 \times 2) = ((2+2) \times 2) = ((2+2) + (2+2)) = 8$$

であることを意味する．また，累乗は**右結合**の演算子なので注意が必要である．すなわち，

$$2^{2^3} = 2^8 = 256$$

が正しく，

$$2^{2^3} = 4^3 = 64$$

は誤りである．

累乗をまとめる (指数法則:足し算) 次のように同じ数を累乗したものの掛け算は一つにまとめることができる．

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

この正しさは次の式変形から担保される．

$$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$

累乗して累乗の括弧を外す (指数法則:掛け算)　次のように，ある数を累乗した後にもう一度累乗操作をする場合は，計算順序を入れ替えたり括弧を外すことができる．

$$(2^2)^3 = (2^3)^2 = 2^{2\times 3} = 2^6 = 64$$

この正しさは次の式変形から担保される．

$$(2^2)^3 = (2\times 2)^3 = ((2\times 2)\times(2\times 2)\times(2\times 2)) = \underbrace{(2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2)}_{2^6} = \underbrace{((2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2))}_{(2^3)^2}$$

3.7　根号計算の法則

根号計算の位置付け　根号は累乗の逆演算の「一つ」である．例えば，$3^2 = \bigcirc$ を計算することが累乗を計算することとすれば，この逆は次の二通りが考えられる．

$$3^{\bigcirc} = 9, \quad \bigcirc^2 = 9$$

前者は $\log_3 9 = \bigcirc$ と表現され，中学では習わない．根号計算は後者で用いられる計算であり，$\pm\sqrt[2]{9} = \bigcirc$ と表現される．一般に根号の左肩に付いている数字が 2 ならば省略され，$\pm\sqrt{9} = \bigcirc$ となる．この根号 $\sqrt{\quad}$ というものは，**それで囲われた数値の平方根の正の値のみ**を表現する．上記の例であれば，$\bigcirc^2 = 9$ の$\bigcirc$に入る適切な値，即ち平方根は -3 と 3 である．$\sqrt{9}$ はその内 3 だけを表現する．

根号の指数表現　根号は指数で表現することが可能である．通常の根号 $\sqrt{\quad}\,(=\sqrt[2]{\quad})$ であれば，

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

と表現される．

根号を外す　根号は 2 乗の逆演算であるため，根号の中の値が何からの値の 2 乗であった場合は，根号を外すことができる．例えば，4 は 2^2 であるため，

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

とすることができる．この正しさは次の式変形によって担保される．

$$\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2\times\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

根号の中の値の一部を外に出す　根号の中の値が何らかの値の 2 乗でなくとも，それを素因数分解した場合に 2 乗の要素が存在しているならば，根号のついてない数との掛け算として外に出すことができる．

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4\times 3^2\times 5} = \sqrt{2^{2\times 2}\times 3^2\times 5} = \sqrt{(2^2)^2\times 3^2\times 5} = 2^2\times 3\times\sqrt{5} = 12\times\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

素因数分解　ある自然数を素数の掛け算に分解する操作の事を素因数分解という．この操作は，一番小さな素数で割れる限り割っていき，割り切れなくなったら次に大きな素数で割っていき，という操作を最後が素数になるまで繰り返すものである．

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 108 \\ \hline
2 & 54 \\ \hline
3 & 27 \\ \hline
3 & 9 \\ \hline
 & 3
\end{array}
$$

素因数分解の結果はこの操作の左側全ての数と一番最後に下に出てきた素数の積となる．即ち，

$$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$$

となる．もう一つ大きめの数 5821200 の例を挙げる．

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 5821200 \\ \hline
2 & 2910600 \\ \hline
2 & 1455300 \\ \hline
2 & 727650 \\ \hline
3 & 363825 \\ \hline
3 & 121275 \\ \hline
3 & 40425 \\ \hline
5 & 13475 \\ \hline
5 & 2695 \\ \hline
7 & 539 \\ \hline
7 & 77 \\ \hline
 & 11
\end{array}
$$

よって，

$$5821200 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$$

3.8　括弧を外す計算

　この節では，式の中に $(1+2)$ のように括弧でくくられた部分がある時に，それを外す方法について説明していく．

二重に付いた括弧　二重についている括弧は一つにまとめることができる．

$$((1+2)) = (1+2)$$

括弧の前後が足し算 (前が足し算で後ろが引き算)　足し算は結合法則が成立するため，何も操作することなく括弧を外すことができる．

$$1 + (2 + 3) + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

また，後ろだけが引き算の場合も括弧を外すことができる．

$$1 + (2 + 3) - 4 = 1 + 2 + 3 - 4$$

この正しさは以下の式変形により担保される．

$$1 + (2 + 3) - 4 = 1 + (2 + 3) + (-4) = 1 + 2 + 3 + (-4) = 1 + 2 + 3 - 4$$

括弧の前が引き算　引き算は負の数の足し算であることに注意する．例えば，

$$1 - (2 + 3) + 4 = 1 + (-(2 + 3)) + 4$$

である．さらに，負の符号は (-1) との掛け算に直すことができるので，

$$1 + (-(2 + 3)) + 4 = 1 + ((-1) \times (2 + 3)) + 4$$

ここで**分配法則**を用いて

$$1 + ((-1) \times (2 + 3)) + 4 = 1 + ((-2 - 3)) + 4 = 1 + (-2 - 3) + 4$$

括弧の前後が足し算である場合は何も操作することなく括弧を外すことができる．また，負の数の足し算をもう一度引き算で表現し直せば，

$$1 + (-2 - 3) + 4 = 1 - 2 - 3 + 4$$

となる．

分配法則　括弧でまとめられた項に対して何らかの数が掛けられている時，その掛け算を**括弧の中のそれぞれの見た目上単項式**に分配することができる．例えば，$3 \times (1 + 2)$ であれば，括弧の中の見た目上単項式は 1 と 2 であるので

$$3 \times (1 + 2) = (3 \times 1 + 3 \times 2)$$

となる．掛け算には交換法則が成立するため，後ろからかれられている場合でも同じである．

$$(1 + 2) \times 3 = (1 \times 3 + 2 \times 3) = (3 \times 1 + 3 \times 2)$$

この段階では**括弧が外れない**ので注意する．括弧が外れる条件は**原則として括弧の前後が足し算の時**と**二重についている括弧を一つにまとめる時**だけである．

別の例を挙げる．例えば $3 \times (1 + 2 \times 4)$ の場合は，括弧の中の見た目上単項式が 1 と 2×4 である (少々紛らわしいので気を付けて確認すること) ので，

$$3 \times (1 + 2 \times 4) = (3 \times 1 + 3 \times 2 \times 4)$$

となる．

もうひとつ例を挙げる．例えば，$3 \times \left(1 + \frac{2}{3}(5+4)\right)$ の**外側の括弧に**分配法則を適用することを考える．すなわち，$3\times$ をまず始めに分配することを考える．この時の括弧の中の見た目上単項式は 1 と $\frac{2}{3}(5+4)$ である．そのため，

$$3 \times \left(1 + \frac{2}{3}(5+4)\right) = \left(3 \times 1 + 3 \times \frac{2}{3}(5+4)\right)$$

となる．この式はまだ $3 \times \frac{2}{3}(5+4)$ の部分に分配法則が適用可能である．最後まで適用すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\left(3 \times 1 + 3 \times \frac{2}{3}(5+4)\right) &= \left(3 \times 1 + 3 \times \left(\frac{2}{3} \times 5 + \frac{2}{3} \times 4\right)\right) \\ &= \left(3 \times 1 + \left(3 \times \frac{2}{3} \times 5 + 3 \times \frac{2}{3} \times 4\right)\right) \\ &= \left(3 \times 1 + 3 \times \frac{2}{3} \times 5 + 3 \times \frac{2}{3} \times 4\right)\end{aligned}$$

改めてことわっておくが，**あくまでこの例は分配法則の例**である．この式を計算するのであれば $(5+4)$ から計算する普通の手順でやる方が手っ取り早い．

括弧の後ろが割り算　割り算も分配可能である．が，割り算には交換法則も結合法則も成立しないため，間違いを防ぐために掛け算に直してから分配するとよいだろう．

$$(1+2) \div 3 = (1+2) \times \frac{1}{3} = \left(1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3}\right)$$

括弧の二乗　二乗の公式を用いて括弧の二乗を一乗の括弧にすることができる (細かい説明は記号を含む計算の章で再度行う)．

$$(5+4)^2 = (5^2 + 2 \times 5 \times 4 + 4^2)$$

括弧の二乗を一乗にする場合は掛け算の分配法則より優先する (累乗 $>$ 掛け算であるため)．

$$3 \times (5+4)^2 = 3 \times (5^2 + 2 \times 5 \times 4 + 4^2) = (3 \times 5^2 + 3 \times 2 \times 5 \times 4 + 3 \times 4^2)$$

4　記号を含む計算

ここからは代数的記号 (x とか a とか) を含む計算について簡易的に説明する．原則としては数値の計算に倣うが，同類項同士でしか足し算引き算はまとめられないことに注意をする．

単項式　式の中に足し算引き算が存在しないものを単項式という．例えば $6 \times a \times x$ は単項式である．$a + b + 7$ は単項式ではない．また，$x \times (x+1)$ も単項式ではない．

多項式　式の中に足し算引き算が存在するものは多項式である．先ほどと同じ例を使うならば，$6 \times a \times x$ は多項式ではない．$a + b + 7$ は多項式である．また，$x \times (x+1)$ も多項式である．

見た目上単項式　括弧の最も外側に掛け算割り算以上の優先度の計算しかない式 (括弧の最も外側に足し算引き算がない式) は「見た目上単項式」と捉えることができる．当然通常の単項式も見た目上単項式と捉えることができる．例えば $6 \times a \times x$ は見た目上単項式である．$a + b + 7$ は見た目上単項式ではない．また，$x \times (x + 1)$ は見た目上単項式である．

見た目上単項式は，展開や因数分解などで，ひとまとまりの数字として捉える必要が出てくる場合があるので重要な考え方である．

掛け算の省略　数字と記号や記号同士の掛け算割り算は，ほとんどの場合省略される．例えば，$6 \times a \times x$ は $6ax$ となる．

省略をしてはいけない場合は，数字の計算の章で述べた**掛け算記号の省略**で述べた場合に従う．

4.1　基本的な四則演算

同類項　ある二つの単項式において，存在している記号の組み合わせが同じである場合，その二つの単項式は同類項であるという．例えば，$7x$ と $2x$ は同類項である．$7xy$ と $2x^2y$ は同類項ではない ($7xy$ は x が一つだが $2x^2y$ には x が二つある)．$4ab$ と ba は同類項である (掛け算の順序は関係がない)．

同類項の識別は，基本的には足し算引き算を行う場合に必要となる．

同類項の足し算引き算　同類項同士で足し算と引き算ができる．

$$2a + 5a = 7a$$

この正しさは，例えば次のような式変形によって担保される．

$$\begin{aligned}
2a + 5a &= (2 \times a) + (5 \times a) \\
&= (a \times 2) + (a \times 5) \\
&= (a + a) + (a + a + a + a + a) \\
&= a + a + a + a + a + a + a \\
&= a \times 7 \\
&= 7a
\end{aligned}$$

同類項でない場合は足し算引き算を行うことができない．例えば $a^2 + ab + b^2 - a - b - 1$ に対してこれ以上足し算引き算を行うことは出来ない．

単項式同士の掛け算　文字を含む単項式の掛け算は同類項であるか否かに関わらず行うことができる．

$$7ab \times 8bc = 56ab^2c$$

単項式同士の割り算　文字を含む単項式の割り算は同類項であるか否かに関わらず行うことができる．ただし，**通常の割り算よりも省略された掛け算の方が優先順位が高いことに注意する**．

$$a^2bc \div abc = a$$

時折，$a^2bc \div abc = ab^2c^2$ とする者がいるが，これは一般的には**誤り**である．丁寧に書くと次のようになる．

$$\begin{aligned} a^2bc \div abc &= (a \times a \times b \times c) \div (a \times b \times c) \\ &= (a \times a \times b \times c) \times \frac{1}{a \times b \times c} \\ &= \frac{a \times \overset{1}{\cancel{a}} \times \overset{1}{\cancel{b}} \times \overset{1}{\cancel{c}}}{\underset{1}{\cancel{a}} \times \underset{1}{\cancel{b}} \times \underset{1}{\cancel{c}}} \\ &= a \end{aligned}$$

4.2　括弧の展開と括弧を外す計算

原則としては**数値の計算**の章で解説した通りである．即ち，分配法則は各見た目上単項式に対して行われ，括弧を外す場合は，重複している場合と前後が足し算の時だけ行える．

例題:) 次の式の括弧を全て展開せよ．

$$1 - 2a(b + 3(2a - 5))$$

外側から展開する例を丁寧に書くと次のようになる．

$$\begin{aligned} 1 - 2a(b + 3(2a - 5)) &= 1 - ((2a \times b) + (2a \times 3(2a - 5))) \\ &= 1 - (2ab + 2a \times 3(2a - 5)) \\ &= 1 + ((-1) \times (2ab + 2a \times 3(2a - 5))) \\ &= 1 + (-2ab - 2a \times 3(2a - 5)) \\ &= 1 - 2ab - 2a \times 3(2a - 5) \\ &= 1 - 2ab - 2a \times (6a - 15) \\ &= 1 - 2ab - (12a^2 - 30a) \\ &= 1 - 2ab + (-12a^2 + 30a) \\ &= 1 - 2ab - 12a^2 + 30a \end{aligned}$$

括弧で囲われた式を分配　例えば $x+1$ は多項式であり，単項式でもなく見た目上単項式でもない．しかし，$(x+1)$ と括弧でくくると，**括弧の外側には足し算引き算が存在しなくなる**ため**見た目上単項式と扱うことができる**．そのため，括弧で囲われた部分全体を分配法則で分配することができる．

$$(x + 1)(y + z) = (((x + 1) \times y) + ((x + 1) \times z))$$

例題:) 次の式を展開せよ．

$$(x + y)(z + a(b + c))$$

今回は内側から展開する例で解いてみよう．

$$\begin{aligned} (x + y)(z + a(b + c)) &= (x + y)(z + ab + ac) \\ &= (((x + y) \times z) + ((x + y) \times ab) + ((x + y) \times ac)) \\ &= ((xz + yz) + (xab + yab) + (xac + yac)) \\ &= xz + yz + xab + yab + xac + yac \end{aligned}$$

覚えておくと楽な公式　例えば $(x+a)(x+b)$ の展開を考える．

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= (((x+a)\times x)+((x+a)\times b)) \\ &= ((x^2+ax)+(bx+ab)) \\ &= x^2+ax+bx+ab\end{aligned}$$

ここで，

$$x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)x+ab$$

と捉えると,「$(x+a)(x+b)$ を展開すると a と b の足し算と掛け算が出てくる」と捉えることができて都合がよい．実際に $(x+a)(x+b)$ とその展開後の形式は公式として学習することになる．即ち，

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

また，この延長として $(x+a)^2$ の公式も考えることができるだろう．$(x+a)^2=(x+a)(x+a)$ であるから，先ほどの公式の $a=b$ 版を考えればよい．

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$$

4.3　因数分解

残念ながらこの章で解説できることは殆どない．原則として因数分解は展開操作を逆向きで辿って行く操作であり，それは即ち展開がきちんと分かっているならその段階で因数分解で必要な知識が揃っているからである．

どうしようもない因数分解にどう立ち向かうか？　公式を単にあてはめようとするだけでは解けない因数分解は当然山ほど存在する．ただ，文字が一種類しかないのであればまだ解ける可能性がある．例題を用いて説明しよう．
例題:) 次の因数分解をせよ．

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+24$$

当然公式を使ってもどうにもならない．この式は幸いにして係数が全て整数であるため，**答えが綺麗になると期待することができる** (問題を作る側も人間であるため余程変な問題はまず出ない)．このような問題の基本的な方針は，**式の値が 0 になる x の値を「あてずっぽう」で探すこと**である．何と適当なと思うかもしれないが，**残念なことにあらゆる因数分解を確実に解く方法は現在の数学体系では発見されていない**．なのであてずっぽうしかないのである．気を取り直して $x=-1$ としてみよう．$x=1$ としないのは，式が全部足し算なので $x=1$ では明らかに 0 にならないためである．

$$\begin{aligned}x^4+10x^3+35x^2+50x+24 &= (-1)^4+(10\times(-1)^3)+(35\times(-1)^2)+(50\times(-1))+24 \\ &= 1-10+35-50+24 \\ &= 0\end{aligned}$$

おめでとう．$x=-1$ でこの式が 0 になることが確認された．ここからいえることは，この式が $(x+1)(?)$ という形式に因数分解可能であるということである．ここで，この「？」がどうなるか考える必要がある．慎重に考えよう．**元の式は四次式であった**．そこから x が一つ分取り除かれている以上，**「？」は三次式になっている**．そして，元の式の x^4 の係数は 1 であったから,「？」に

ある x^3 の係数も 1 であるはずである．そうでなければ展開して戻した x^4 の項の係数が 1 にならないからである．

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x^3 + ?)$$

残りの「？」を考える．現在の $(x+1)(x^3+?)$ をもう一度展開してみて確定するのは，

$$(x+1)(x^3+?) = x^4 + x^3 + ?$$

だけである．高い次数から順番に考えよう．元の式の x^3 の係数は 10 であった．つまりあと $9x^3$ だけ足りていない．そこで，括弧内の「？」の部分に $9x^2$ を追加する ($(x+1)$ の x 側と掛け算されることを期待している)．

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x^3 + 9x^2 + ?)$$

もう一度 $(x+1)(x^3+9x^2+?)$ を展開して確定する部分を考えよう．

$$(x+1)(x^3+9x^2+?) = x^4 + 10x^3 + 9x^2 + ?$$

元の式の x^2 の係数は 35 である．あと $26x^2$ 足りないので括弧内の「？」の部分に $26x$ を追加する．

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x^3 + 9x^2 + 26x + ?)$$

もう一度 $(x+1)(x^3+9x^2+26x+?)$ を展開しよう．

$$(x+1)(x^3+9x^2+26x+?) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 26x + ?$$

元の式の x の係数は 50 である．あと $24x$ 足りないので括弧内の「？」の部分に 24 を追加する．

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x^3 + 9x^2 + 26x + 24 + ?)$$

もう一度 $(x+1)(x^3+9x^2+26x+24+?)$ を展開しよう．

$$(x+1)(x^3+9x^2+26x+24+?) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 + ?$$

良く見てみると，確定している部分が元の式と一致している．つまり，もう不明な「？」の部分は存在していないため，

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x^3 + 9x^2 + 26x + 24)$$

である．さて，右側の $(x^3+9x^2+26x+24)$ もまだ因数分解可能である．今度は $x=-2$ をこの式に代入してみよう．

$$\begin{aligned} x^3 + 9x + 26x + 24 &= (-2)^3 + (9 \times (-2)^2) + (26 \times (-2)) + 24 \\ &= -8 + 36 - 52 + 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

おめでとう．この右側の括弧はどうやら $(x+2)(?)$ という形式になるようだ．以後のやり方は先ほどと同様である．面倒な計算を続けていくと，

$$(x+1)(x^3 + 9x^2 + 26x + 24) = (x+1)(x+2)(x^2 + 7x + 12)$$

となる．もう公式が使えそうである．結局答えは，

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

となる．**非常に面倒である**がこれ以外にいい方法があるかというと**ない**．諦めよう．

5　等式変形

ここからは (左辺) = (右辺) という形式を持つ**等式**に対する操作に関わる計算について述べる．

5.1　等式とは

先ほども述べたように等式とは (左辺) = (右辺) という形式を持つ式のことで，**左辺の計算結果と右辺の計算結果が同じ**ことを示す式である．例えば，次のようなものが等式の具体例としてあげられる．

$$1 + 2 = 3, \quad 2(a + b) = 2a + 2b, \quad y = 4x + 9$$

5.2　基本的な等式変形

等式の左辺と右辺の式変形　等式の左辺と右辺は**それぞれで**式変形を行っても等式の関係は変化しない．即ち，次の変形は正しい．

$$\begin{aligned} 3(x+2) &= 1+8 \\ 3x+6 &= 9 \end{aligned}$$

この例では，左辺に対して $3(x + 2) = 3x + 6$ という式変形を，右辺に対して $1 + 8 = 9$ という式変形を行っている．

この一般化はややややこしいが，次のように書ける．

$$A = A' \text{かつ} B = B' \text{かつ} A = B \Rightarrow A' = B'$$

分かりにくいようなら具体化してみると良い．先ほどの例に当てはめると次のようになる．

$$3(x + 2) = 3x + 6 \text{ かつ } 1 + 8 = 9 \text{ かつ } 3(x + 2) = 1 + 8 \Rightarrow 3x + 6 = 9$$

両辺への足し算引き算　等式の**左辺全体と右辺全体に同じ**数を足したり引いたりしても等式の関係は変化しない．即ち次の変形は正しい．

$$\begin{aligned} x-1 &= 5 \\ (x-1)+1 &= (5)+1 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

教科書などには一般化されて次のように書かれることが多いだろう．

$$A = B \Rightarrow A + C = B + C$$

ただし，実際には A や B が単項式な状況ばかりではなく，この表現はやや不適切である．次のように覚えなおしておく方が良いだろう．

$$A = B \Rightarrow (A) + C = (B) + C$$

くどいようだが,「左辺と右辺**全体**に対して同じ数を足したり引いたりしても等式の関係は変化しない」のであり，決して左辺の一部や右辺の一部に対して足したり引いたりしてはならない．

両辺への掛け算割り算　等式の**左辺全体と右辺全体**に**同じ**数を掛けたり割ったりしても等式の関係は変化しない (ただし 0 除算は除く．如何なる場合も「0 で割ること」をしてはいけない)．即ち，次の変形は正しい．

$$\begin{aligned} 2x+2 &= 6 \\ (2x+2)\times\frac{1}{2} &= (6)\times\frac{1}{2} \\ x+1 &= 3 \end{aligned}$$

一般化して書くと次のようになる．

$$A = B \Rightarrow (A)\times C = (B)\times C$$

両辺の累乗　等式の**左辺全体と右辺全体**を**同じ**数だけ累乗しても等式の関係は変化しない．即ち次の変形は正しい．

$$\begin{aligned} x+1 &= 8 \\ (x+1)^4 &= (8)^4 \end{aligned}$$

一般化して書くと次のようになる．

$$A = B \Rightarrow (A)^C = (B)^C$$

5.3　式変形と等式変形の差異

式変形　式変形とは**一つ**の式を数値の計算の章や記号を含む計算の章で紹介したような計算を用いて変形していくことを指す．
例題:) 次の式を括弧を全て展開した形に変形をせよ．

$$2a(b+5(3a+b))$$

このような問題が**式変形問題の具体例**となる．式変形で計算した結果は元の式と等しいので，この変形は = で繋げて表現していくことができる．

$$\begin{aligned} 2a(b+5(3a+b)) &= 2a(b+(15a+5b)) \\ &= 2a(b+15a+5b) \\ &= 2a(15a+6b) \\ &= 30a^2+12ab \end{aligned}$$

等式変形　等式変形とは (左辺) = (右辺) の形式を持つ式を，**左辺の計算結果と右辺の計算結果が同じであることを保証したまま変形すること**である．例えば，次の式は明らかに成立する．

$$2 = 2$$

これに対して，両辺から 1 を引いた式も，また等式として成立する．

$$1 = 1$$

即ち，$2=2$ は $1=1$ へ等式変形することができる．**しかし，$1=2$ ではない**．この当たり前の部分が非常に重要である．$1=2$ ではないため，次の記述は**誤り**である．

$$2=2=2-1=2-1=1=1$$

$2=2$ と $1=1$ が等式の関係を維持していることを表現する場合は，縦に並べて書く (この場合 $=$ の位置を揃えることが多い) か，**同値記号** $\Leftrightarrow$ を用いなければならないので注意する．即ち，正しい表記は次の通りになる．

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 2-1 &= 2-1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

または，

$$2=2 \Leftrightarrow 2-1=2-1 \Leftrightarrow 1=1$$

例題:) 次の方程式を解け．

$$3(x+2)=15$$

このような問題が**等式変形問題**の具体例となる．先ほどの説明を踏まえ，変形を繋げて記述していく場合は次のようになる．

$$\begin{aligned} 3(x+2)=15 &\Leftrightarrow 3x+6=15 \\ &\Leftrightarrow (3x+6)-6=(15)-6 \\ &\Leftrightarrow 3x=9 \\ &\Leftrightarrow (3x)\times\frac{1}{3}=(9)\times\frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

5.4 移項とは何だったのか

大抵中学の教育過程において**移項**という概念が出てくる．この操作は実際には**項は移動していない**にも関わらず，等式変形前と等式変形後を比較するとまるで符号を反転して他方に移動した様に見える現象を指す．等式の足し算引き算で次のような例を出した．

$$\begin{aligned} x-1 &= 5 \\ (x-1)+1 &= (5)+1 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

この式の二行目を左辺だけ計算すると次のような式が得られるだろう．

$$x=(5)+1$$

元の式は $x-1=5$ である．この元の式と $x=(5)+1$ を比較すると，左辺の -1 が右辺の $+1$ に移ったかのように見える．**この錯覚の事を移項という**．実際にこの -1 と $+1$ は由来が違うものであることは色を付けてみると分かりやすいだろう．

$$\begin{aligned} {\color{red}x-1} &= {\color{red}5} \\ {\color{red}(x-1)}{\color{blue}+1} &= {\color{red}(5)}{\color{blue}+1} \\ x &= {\color{red}(5)}{\color{blue}+1} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

赤色は元に式に存在していた部分，青色は等式変形操作のために計算者が付け加える部分である．比較すると，元の式は $x-1=5$ に対し，いわゆる移項を行った後の部分は $x=(5)+1$ であり，-1 と $+1$ は全く由来の異なるものであることが分かる．

6　図形に関わるあれこれ

この章では図形に関わる公式や性質を改めてまとめて行く．

6.1　三角形に関わる公式や性質

三角形の成立条件　三角形が図形として成立するために，**ある二辺の長さの和は，他の一辺より長い**が，どの二辺の組み合わせでも成立している必要がある．

三角形の内角の和　平面上[1] のどんな三角形においても，その内角の和は必ず $180°$ となる．

三角形の外角　三角形の外角は，隣接していない角の和に等しい．図 3 を例の一つとして示す．以下にこの性質の正しさを示す．$\angle\mathrm{DBC}$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外角である．この時，

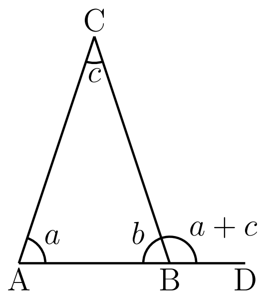


図 3: 外角の説明図

$$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{ABC}=180°$$

であり，AD は直線であるため，

$$\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{CBD}=180°$$

である．よって，

$$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{ABC}=180°=\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{CBD}$$

となるため，

$$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{CBA}+\angle\mathrm{CBD}$$

である．この両辺から $\angle\mathrm{CBA}$ を引くと，

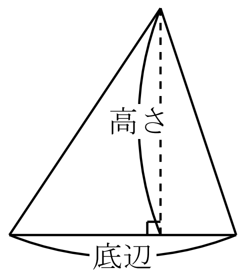
$$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{CBD}$$

であり，これを以って「三角形の外角は，隣接していない角の和に等しい」が証明された．

三角形の面積公式　三角形の面積は

$$(\text{底辺})\times(\text{高さ})\times\frac{1}{2}$$

で求められる．



[1]正しくはユークリッド平面上

三角形の合同条件　三角形の合同条件は次の三つである．(表現は教科書に合わせると良い)

1. 三辺がそれぞれ等しい (図 4)
2. 二辺とその間の角がそれぞれ等しい (図 5)
3. 一辺とその両端の角がそれぞれ等しい (図 6)

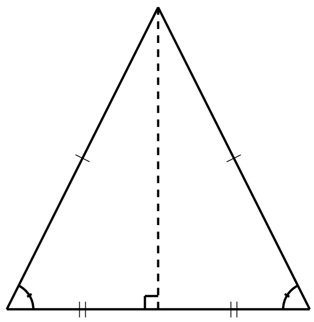
この内のどれかが成立すれば三角形の合同は成立する．

直角三角形の合同条件　直角三角形の合同を確認する場合は，三角形の合同条件に加えて，次の二つの条件が利用可能である．

5. 斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい (図 7)
6. 斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しい (図 8)

二等辺三角形の定義と性質　二等辺三角形の定義は「二辺が等しい三角形」である．この定義から比較的簡単に導ける性質をまとめると次のようになる．

1. 二辺が等しい
2. 等しい二辺に挟まれていない二つの角 (**底角**と呼ぶことがある) が等しい
3. 等しい二辺に挟まれた頂点から向かいの辺に垂線を下すと向かいの辺を二等分する．この時左右に分かれた三角形は合同である．



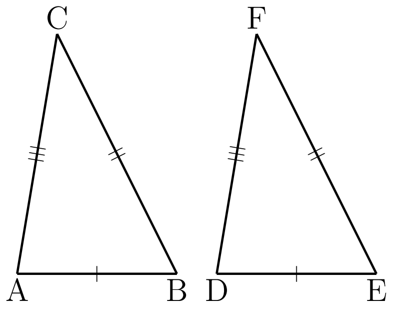


図 4: 三辺がそれぞれ等しい

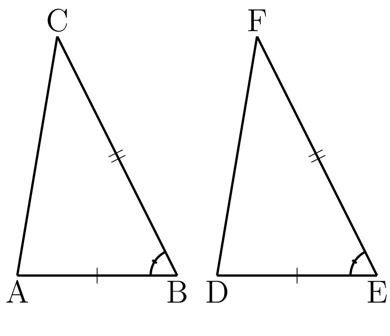


図 5: 二辺とその間の角がそれぞれ等しい

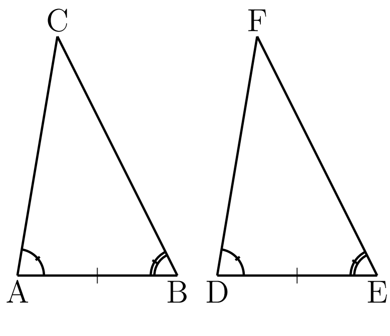


図 6: 一辺とその両端の角がそれぞれ等しい

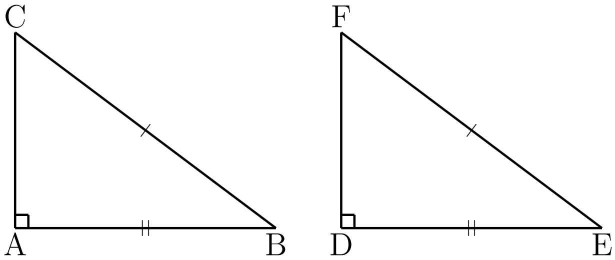


図 7: 斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい

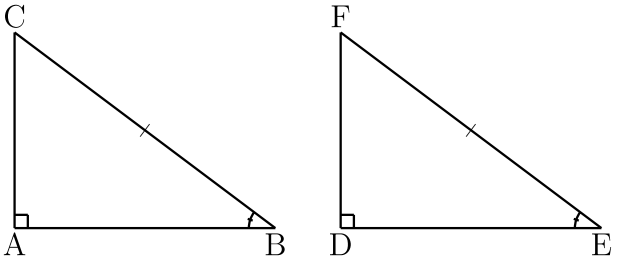
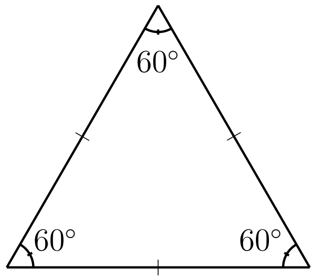


図 8: 斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しい

正三角形の定義と性質　正三角形の定義は「三辺が等しい三角形」である．この定義から比較的簡単に導ける性質をまとめると次のようになる．



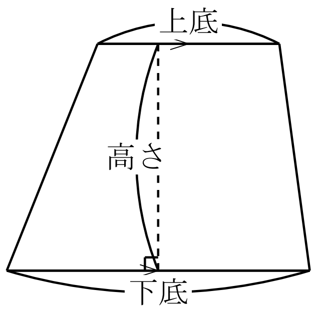
1. 三辺が等しい
2. 三角は全て等しく 60° である．
3. その他二等辺三角形で成立する性質は全て成立する

6.2　四角形に関わる公式や性質

台形の定義と面積公式　台形の定義は「一組の向かい合う辺が平行な四角形」である．このような台形の面積は，

$$((\text{上底}) + (\text{下底})) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{2}$$

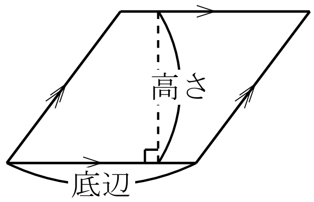
で求めることができる．



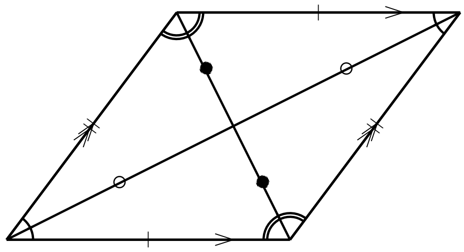
平行四辺形の定義と面積公式　平行四辺形の定義は「二組の向かい合う辺がそれぞれ平行である四角形」である．このような平行四辺形の面積は，

$$(\text{底辺}) \times (\text{高さ})$$

で求めることができる．



平行四辺形の性質　平行四辺形の定義から比較的簡単に導くことができる性質として次のようなものが挙げられる．

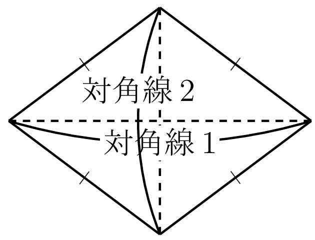


1. 向かい合う辺は平行
2. 向かい合う辺の長さは等しい
3. 向かい合う角の大きさは等しい
4. 対角線は互いの中点で交わる．

平行四辺形の成立条件　平行四辺形の多くの性質はその逆が成り立つため，次の事柄は正しい．

1. 二組の向かい合う辺がそれぞれ等しいならば，その四角形は平行四辺形である．
2. 二組の向かい合う角がそれぞれ等しいならば，その四角形は平行四辺形である．
3. 二本の対角線がそれぞれの中点で交わるならば，その四角形は平行四辺形である．

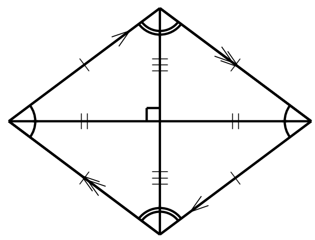
ひし形の定義と面積公式　ひし形の定義は「全ての辺が等しい四角形」である．ひし形は平行四辺形の一つでもあるため平行四辺形の面積公式である (底辺) $\times$ (高さ) をそのまま使うことができる．また，対角線の長さのみが分かっている場合でも，



$$(\text{対角線 1 の長さ}) \times (\text{対角線 2 の長さ}) \times \frac{1}{2}$$

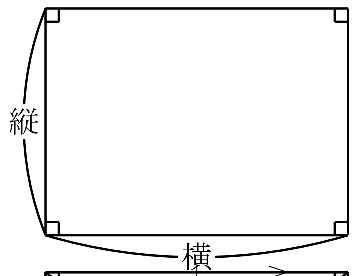
で求めることもできる．これは，対角線 2 を底辺と見た場合に，上下の三角形の面積を足した場合の式をまとめたものである．

ひし形の性質　ひし形の定義から簡単に導くことができる性質には次のようなものが挙げられる．

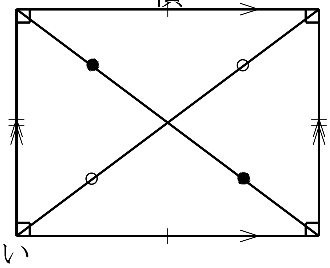


1. 全ての辺が等しい
2. 対角線が垂直に交わる
3. 他，平行四辺形で成り立つ性質は全て成り立つ

長方形の定義と面積公式　長方形の定義は「全ての角が等しい四角形」である．長方形は平行四辺形の一つでもあるため平行四辺形の面積公式である (底辺) $\times$ (高さ) をそのまま使うことができる．また，長方形の内角は定義から全て $90°$ であるため，この公式は (縦) $\times$ (横) と同等である．

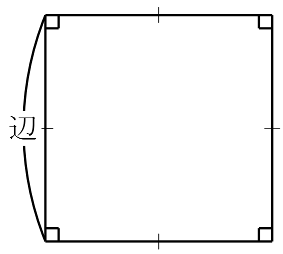


長方形の性質　長方形の定義から簡単に導くことができる性質には次のようなものが挙げられる．

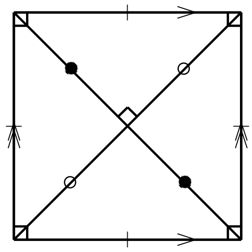


1. 全ての角は直角である
2. 他，平行四辺形で成り立つ性質は全て成り立つ

正方形の定義と面積公式　正方形の定義は「全ての辺と，全ての角が等しい四角形」である.「ひし形でもあり長方形でもある四角形」と言い直すこともできる．当然正方形も平行四辺形の一つであるため，(底辺) $\times$ (高さ) をそのまま使うことができるが，そもそもどれか一つでも辺の長さが分かっているのならば，$(\text{辺})^2$ で面積を求めることができる．



正方形の性質　正方形の定義から簡単に導くことのできる性質には次のようなものが挙げられる．



1. 全ての辺は等しい
2. 全ての角は等しい
3. 他，ひし形・長方形・平行四辺形で成り立つ性質は全て成り立つ

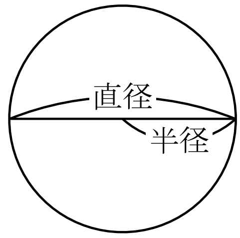
6.3　円に関わる公式や性質

円の定義　円の定義は「ある一点から等距離にある点の集合として形作られる曲線」である．

円周率　円周率は通常 π と表記される．この数値は円の周の長さや円の面積を求める上で**都合がよくなるように**定められた値であり，大体 3.14 程度の大きさである．

円の周の長さと面積　円の**周の長さ**は次の公式により求められる．

$$(\text{直径}) \times \pi$$



直径は半径の 2 倍でもあるので，これは次のように書き換えることもできる．

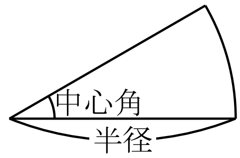
$$(\text{半径}) \times 2 \times \pi$$

また，円の**面積**は次の公式により求められる．

$$(\text{半径})^2 \times \pi$$

扇形の面積　扇形は，円を $\dfrac{(\text{中心角})}{360^\circ}$ した図形であるので，面積も円の面積公式から $\dfrac{(\text{中心角})}{360^\circ}$ したものを使えばよい．

$$(\text{半径})^2 \times \pi \times \frac{(\text{中心角})}{360}$$



6.4　三角形の五心

内心　三角形の**内心**とは**三角形の三つの角の二等分線が交わる点**のことを言う．また，内心を中心として各辺に下した垂線の長さを半径とする円の事を**内心円**という．

内心と内心円のイメージは図 9 に示す．

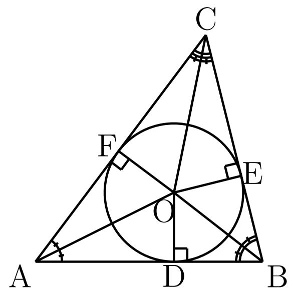


図 9: 内心のイメージ

外心　三角形の**外心**とは，三角形の**各辺の垂直二等分線が交わる点**のことである．また，外心を中心として，外心から三角形の各頂点までの長さを半径とする円の事を**外心円**という．

外心と外心円のイメージを図 10 に示す．

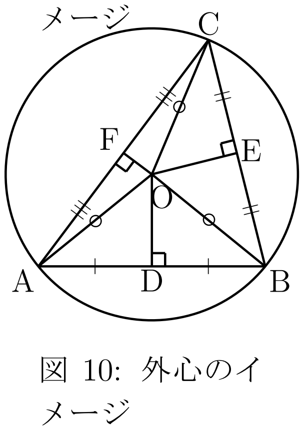


図 10: 外心のイメージ

重心　三角形の**重心**とは，三角形の**各頂点からそれぞれの向かい合う辺を二等分する直線を引いた時に交わる点**である．

重心のイメージを図 11 に示す．

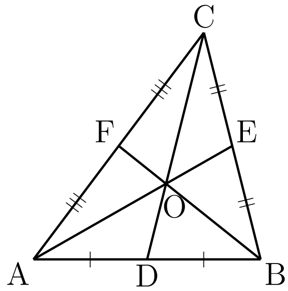


図 11: 重心のイメージ

垂心　三角形の**垂心**とは，三角形の**各頂点からそれぞれの向かい合う辺に対して垂線を引いた時に交わる点**である．

垂線のイメージを図 12 に示す．

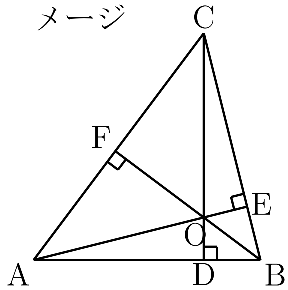


図 12: 垂心のイメージ

傍心　三角形の**傍心**とは，三角形の**一つの内角とそれ以外の二つの外角のそれぞれの二等分線の交わる点**である．また，傍心を中心として三角形にめり込まないように接する円を**傍心円**という．内角と外角の組み合わせが三通りあるので，傍心は一つの三角形に対して三つ存在する．

傍心と傍心円のイメージを図 13 に示す．

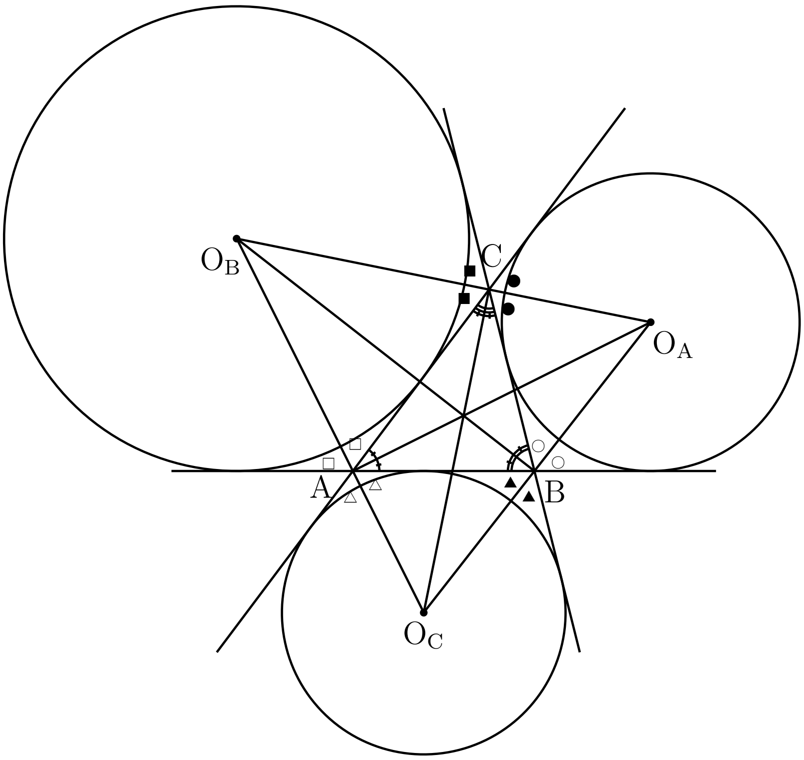
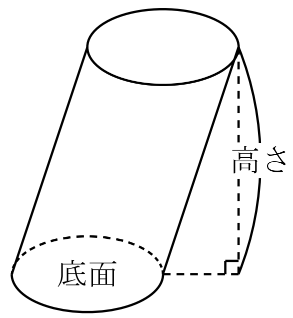


図 13: 傍心のイメージ

6.5　柱と錐

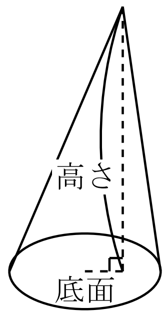


柱の定義と体積　柱の定義は，**ある平面図形があった時，その平面図形と合同でかつ平行な関係にあるもう一つの図形の間の，端の部分を結ぶことで形作られる立体**である．

このように作られた柱の体積は，

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

で求めることができる．



錐の定義と体積　錐の定義は，**ある平面図形があった時，端の部分と平面図形のある平面上にない一点を結ぶことで形作られる立体**である．

このように作られた錐の体積は，

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) \times \frac{1}{3}$$

で求めることができる．

表面積　表面積は立体を切り開き，平面の上に全て展開した状態 (**展開図**) の面積を全て足したもののことを言う．

7　比率

7.1　割合の表現

割合　割合とは**ある基準に対して別の比較対象が何倍であるか**を表現したものである．一般的に**ある基準そのものは 1 倍**と捉える．

具体例

- 3ℓ を基準として 6ℓ は 2 である．
- $4\mathrm{m}^2$ を基準として $1\mathrm{m}^2$ は $\dfrac{1}{4}$ である．
- 2 個を基準として 5 個は $\dfrac{5}{2}$ である．

百分率と千分率　割合を表現する時に%(パーセント) や‰(パーミル) という単位を用いることがある．これらと通常の割合表現は次のような関係にある．

$$1 = 100\% = 1000‰$$

即ち,

- 基準を 1 とするのが通常の割合表記
- 基準を 100 とするのが百分率
- 基準を 1000 とするのが千分率

となる．

7.2 比と比例

比　まず，割合の説明で出した例をもう一度載せる．

- 3ℓ を基準として 6ℓ は 2 である．
- $4\mathrm{m}^2$ を基準として $1\mathrm{m}^2$ は $\dfrac{1}{4}$ である．
- 2 個を基準として 5 個は $\dfrac{5}{2}$ である．

この「〇〇を基準として」とわざわざ書くのは時に鬱陶しい作業である．また，三つ目の例では「2 個を基準として」いる，即ち「2 を 1 として」いるためやや直感に反する．

多くの場合，割合表現の「〇〇を基準として△△は××である」の内，記述上は〇〇と△△が対応していることが分かれば十分な場合がある．このような場合に**比**を用いる．同じ例を用いるならば，

- 3ℓ を基準として 6ℓ は 2 である．$\Leftrightarrow 3:6$
- $4\mathrm{m}^2$ を基準として $1\mathrm{m}^2$ は $\dfrac{1}{4}$ である．$\Leftrightarrow 4:1$
- 2 個を基準として 5 個は $\dfrac{5}{2}$ である．$\Leftrightarrow 2:5$

となる．もちろん比から割合の文章に戻すこともできる．例えば $3:4$ は「3 を基準として 4 は $\dfrac{4}{3}$ である」となる．

比の約分　比は約分することができる．$3:6$ の例を改めて考えよう．$3:6$ を比の文章に戻すと，「3 を基準として 6 は $\dfrac{6}{3}$ である」となる．この $\dfrac{6}{3}$ は 3 で約分ができる．実際に約分してみると $\dfrac{2}{1}=2$ となる．文章の中に戻してみると「3 を基準として 6 は 2 である」となる．結論が「2 である」となる別の文章の例を考えると，明らかな例が一つあり，**「1 を基準として 2 は 2 である」**$\Leftrightarrow 1:2$ がそうである．**比は割合を表現する文章を省略したものであるから，割合の文章の結論が同じになる比は全て同じものと捉えてよい**．従って，

$$3:6=1:2$$

となる．このような機序で比は約分をすることが可能である．また，もちろん比の左右の数字に同じ数を掛けた比も同じ比となる．

比例　例えば比 $2:5$ を考える．この比と同じ比を列挙してみる．

$$2:5=4:10=6:15=8:20=\dots$$

もちろん，整数でない領域にも $2:5$ と同じ比は存在する．

$$1:\frac{5}{2}=\frac{3}{2}:\frac{15}{4}=2:5=\frac{5}{2}:\frac{25}{4}=3:\frac{15}{2}=\dots$$

このような同じ比を列挙していく上で,「$2:5=4:?$」や「$2:5=?:10$」の「?」を統一的に求める方法が欲しくなってくる．そこで，**変数を用いて同じ比の集合を表現する方法**を考えた人がいた．

$$y=\frac{5}{2}x$$

これが**比例**である．ここで $\frac{5}{2}$ は $2:5$ を比の文章に戻した時の結論部であり，x は比の左側，y は比の右側に対応している[2]．これを用いれば，例えば「$2:5=4:?$」の「?」を求める場合は $x=4$ を代入して

$$y=\left(\frac{5}{2}\times 4\right)$$

を解けば，$y=10$ と「?」を求めることができる.「$2:5=?:10$」であれば $y=10$ を代入して，

$$10=\frac{5}{2}x$$

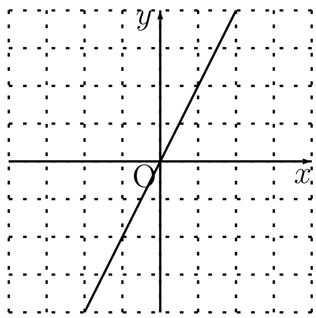
を解いて $x=4$ と「?」を求めることができる．

この比例の $\frac{5}{2}$ の部分は**比例定数**と言われ，具体的な数が分かっていない時は a と書かれることが多い．

比例とグラフ　比例を表現する式が定まると，それに対応したグラフを引くことができる．例えば,

$$y=2x$$

のグラフは右図のようになる．



比例のグラフにおいて，**比例定数はグラフの傾きを直接決定する**．従って，比例のグラフにおいては**比例定数＝傾き**となる．また，**比例のグラフは必ず原点 $(0,0)$ を通過する直線となる**．

もう一度述べるが，**比例のグラフは直線**であり，**比例のグラフは原点を通過する**．従って，式が判明しているのなら，原点以外に通過する一点を適当に計算してやれば比例のグラフを描くことができる．例えばこの $y=2x$ の例であれば，適当に $x=1$ を代入して対応する y は $y=2$ であることが分かる．よって，このグラフは $(1,2)$ を通過するから，$(0,0)$ と $(1,2)$ を通過する直線を引けば，$y=2x$ のグラフとなる．

[2]左右が逆転しているのは関数表現 $y=f(x)$ に合わせるため (意味はよく分からなくて良い)